

1 Enunciado

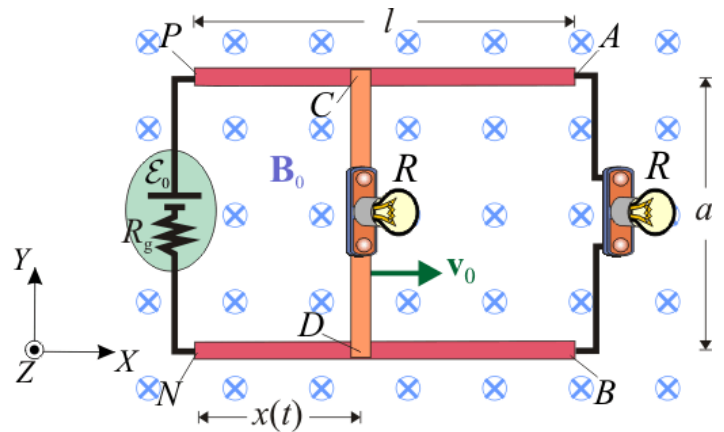
El circuito eléctrico de la figura está formado por dos regletas conductoras, ambas de longitud l , dispuestas en paralelo y separadas por una distancia fija a . Sus extremos de dichas regletas están conectados a los electrodos P y N de un generador d.c. (batería), cuya f.e.m. tiene un valor constante \mathcal{E}_0 y una resistencia interna R_g . Los otros extremos de las dos regletas, A y B , se conectan a través de una bombilla incandescente de resistencia R . Además, se tienen otros dos segmentos conductores, alineados y conectados por otra bombilla idéntica a la anterior, y con los extremos libres, C y D , siempre en contacto con las regletas. El resto de resistencias eléctricas del sistema son despreciables frente al valor R de las bombillas, excepto la resistencia interna del generador, que vale $R_g = R/2$. Todo el sistema está sometido a un campo magnético uniforme $\mathbf{B}_0 = -B_0 \mathbf{k}$ perpendicular al plano OXY que contiene al circuito, y de sentido opuesto al eje OZ , tal como se indica en la figura.

Inicialmente, la rama conductora CD está en reposo, en contacto con los extremos de las regletas que se hallan conectados a la batería (P y N). En esta situación, obtenga las expresiones de las siguientes magnitudes en función de los parámetros indicados en el enunciado:

- Intensidad de corriente total suministrada por el generador, e intensidades en cada una de las ramas.
- Expresión de la energía que por unidad de tiempo se disipa en cada resistencia. ¿Cómo serán, comparativamente, las intensidades luminosas de las bombillas?

A partir de un cierto instante, la rama CD con bombilla incluida, se desplaza hacia la bombilla fija que cierra el circuito entre A y B , manteniéndose perpendicular a las regletas conductoras y alcanzando una velocidad constante de valor v_0 . En esta nueva situación, obtenga las expresiones de:

- Flujos magnéticos a través de las espiras $\partial\Sigma_1 \equiv PABN$ y $\partial\Sigma_2 \equiv PCDN$, y fuerzas electromotrices inducidas en cada una de ellas.
- Ecuaciones del circuito en las espiras $\partial\Sigma_1$ y $\partial\Sigma_2$.
- Intensidades de las corrientes eléctricas que recorren el generador y cada una de las dos bombillas. ¿Qué puede decir acerca de las intensidades luminosas de las bombillas en relación con las iniciales? ¿Podría llegar a apagarse alguna de ellas?



2 Solución

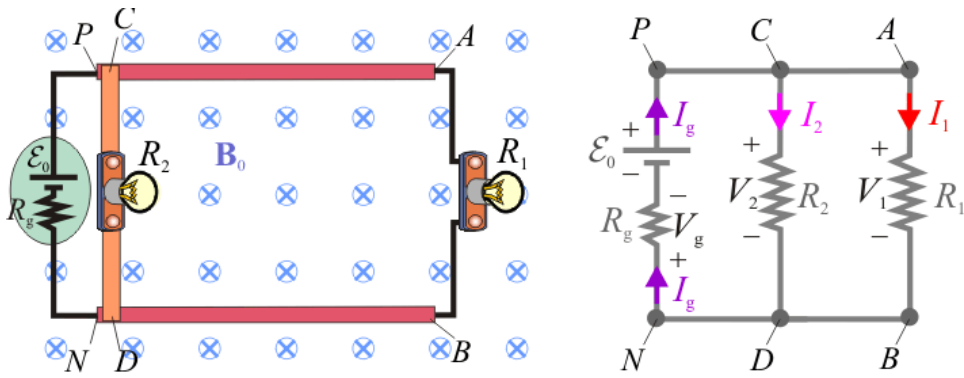
2.1 Situación estacionaria

Los apartados a) y b) del enunciado se corresponden con una situación estacionaria del sistema: el segmento conductor CD , con la bombilla permanece en reposo; por tanto, el flujo magnético del campo \mathbf{B}_0 a través del circuito permanece constante, por lo que la única fuerza electromotriz será la de la batería, que tiene un valor \mathcal{E}_0 , constante en el tiempo. Por consiguiente, en el circuito bajo estudio y en la situación descrita, se establecerán corrientes eléctricas estacionarias.

En el enunciado se indica que las resistencias eléctricas de las regletas y segmentos conductores son despreciables frente a las de las bombillas y las resistencia interna del generador. Por tanto, en el modelo simple del circuito bajo estudio, hay dos únicos nodos: el nodo "1", correspondiente a los puntos P , C y A , y el nodo "2" para los puntos N , D y B , ya que:

$$V_P - V_C = 0 = V_C - V_A; \quad V_B - V_D = 0 = V_D - V_N$$

Entre dichos nodos tenemos tres ramas paralelas: las correspondientes a los segmentos AB y CD , con las resistencias de las bombillas, R_1 y R_2 , ambas de igual valor R ; y la rama del generador de f.e.m. \mathcal{E}_0 y resistencia interna $R_g = R/2$.



La primera consecuencia de esto es que la diferencia de potencial entre los extremos son idénticas en las tres ramas. Por el contrario, la intensidad de la corriente eléctrica en cada una de las ramas será distinta, en general, estando determinada por dicha diferencia de potencial y el dispositivo localizado en ella:

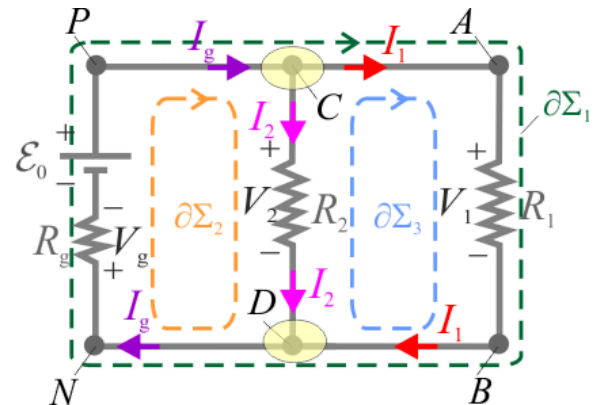
$$V_P - V_N = V_A - V_B = V_C - V_D; \quad \begin{cases} V_P - V_N = \mathcal{E}_0 - V_g = \mathcal{E}_0 - I_g R_g \\ V_A - V_B = V_1 = I_1 R_1 \\ V_C - V_D = V_2 = I_2 R_2 \end{cases}$$

2.1.1 Intensidades de corriente en el circuito

Estas magnitudes las determinaremos utilizando las leyes de Kirchoff. La primera establece que, una vez establecidos arbitrariamente los sentidos para las intensidades de las corrientes eléctricas que recorren cada rama, la suma de las intensidades que salen (llegan) de (a) cada nodo, es cero:

$$1^{\text{a}} \text{ ley de Kirchoff} \rightarrow -I_g + I_1 + I_2 = 0, \text{ en } C \text{ y } D$$

La segunda ley de Kirchoff establece que en cada una de las mallas del circuito, la suma de las f.e.m. es igual a la suma de las caídas de tensión. En el circuito bajo estudio se distinguen tres mallas que, recorridas en sentido horario (y para los sentidos arbitrarios atribuidos a las intensidades), proporcionan las siguientes ecuaciones:



$$2^{\text{a}} \text{ ley de Kirchoff} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_0 = V_1 + V_g = I_1 R_1 + I_g R_g; \text{ en } \partial\Sigma_1 \equiv PABN \\ \mathcal{E}_0 = V_2 + V_g = I_2 R_2 + I_g R_g; \text{ en } \partial\Sigma_2 \equiv PCDN \\ 0 = V_1 - V_2 = I_1 R_1 - I_2 R_2; \text{ en } \partial\Sigma_3 \equiv CABD \end{cases}$$

Obsérvese que estas ecuaciones no son linealmente independientes: si se suman la segunda y la tercera, se obtiene la primera ecuación.

Si combinamos la tercera de estas ecuaciones con la proporcionada por la primera ley de Kirchoff y utilizamos el dato relativo a los valores de las tres resistencias eléctricas de circuito, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} R_1 = R_2 = 2R_g = R \\ I_1 R_1 = I_2 R_2 \\ I_1 + I_2 = I_g \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{I_g}{2}$$

Sustituyendo este resultado parcial en, por ejemplo, la ecuación del circuito en la malla $\partial\Sigma_1$, se obtiene:

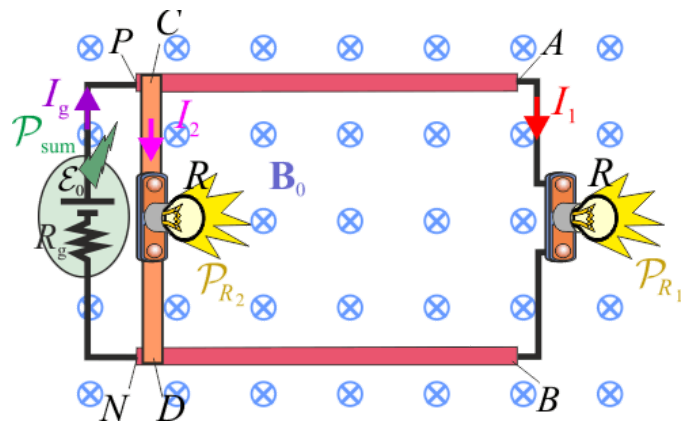
$$\mathcal{E}_0 = \frac{I_g}{2} R + I_g \frac{R}{2} = I_g R \Rightarrow I_g = \frac{\mathcal{E}_0}{R} = 2I_1 = 2I_2$$

2.1.2 Potencias disipadas en las resistencias

Las bombillas son dispositivos resistivos que almacenan energía. Es decir, toda la energía eléctrica que llega a estas resistencias se disipa por efecto Joule. En consecuencia, la energía disipada por unidad de tiempo en cada una de las bombillas es igual a la potencia eléctrica instantánea que llega a las mismas asociada a la correspondiente corriente eléctrica:

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_i} = I_i V_i = I_i^2 R_i \Rightarrow$$

$$\mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_1} = \mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_2} = \left(\frac{I_g}{2}\right)^2 R = \frac{\mathcal{E}_0^2}{4R}$$



Es decir, en la situación estacionaria analizada, como las bombillas son idénticas (de igual resistencia) y las corrientes eléctricas que las recorren también son iguales, ambas disipan la misma cantidad de energía por unidad de tiempo. Y como su luminosidad va a depender de dicha potencia disipada, podemos concluir que ambas iluminan con igual intensidad.

Balance energético

Aunque no se solicita en el enunciado, realicemos el balance energético instantáneo en el circuito, comparando la potencia suministrada por el generador ($\mathcal{P}_{\text{sum}}|_g$) con la disipada en las resistencias eléctricas de las bombillas. La cantidad de energía que por unidad de tiempo suministra el generador en cada instante es igual al voltaje/diferencia de potencial entre los electrodos del generador, multiplicado por la intensidad de corriente instantánea que recorre este dispositivo. Si además de la f.e.m., el generador tiene una cierta resistencia interna, se tendrá:

$$\mathcal{P}_{\text{sum}}|_g = I_g (V_P - V_N) = \mathcal{E}_0 I_g - R_g I_g^2$$

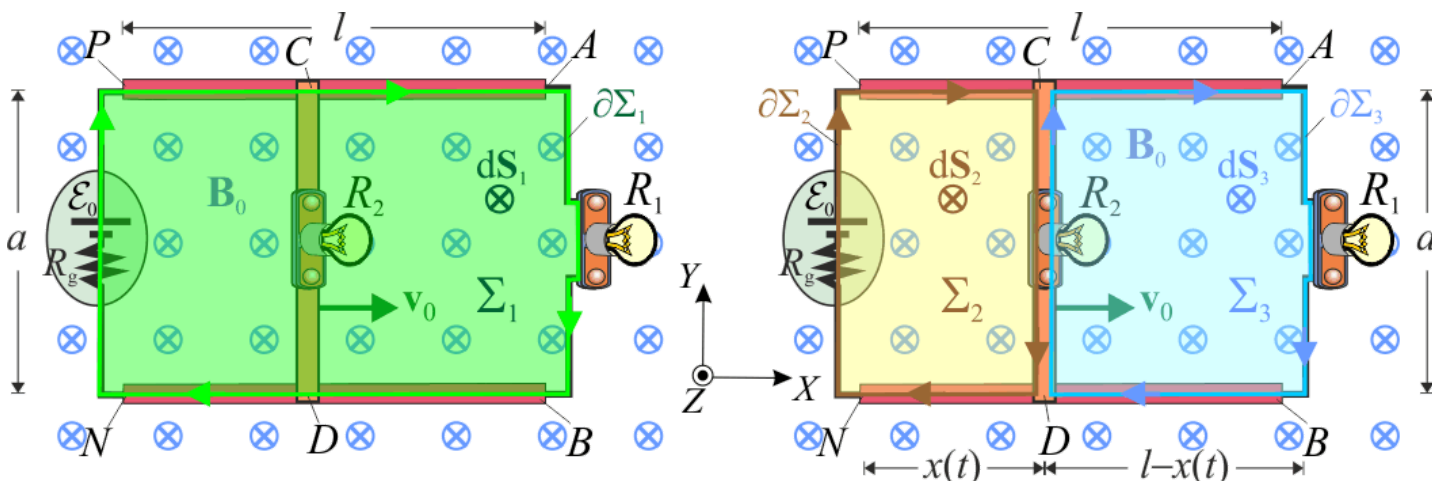
Es decir, no toda la energía que por unidad de tiempo se transforma en energía eléctrica en el generador, es suministrada al circuito: hay una parte que pierde en propio proceso de generación de la corriente, y cuyo valor coincidiría en cada instante con la que se disiparía en la virtual resistencia interna del generador, R_g . Sustituyendo los valores obtenidos en éste y en apartados anteriores, se comprueba que:

$$\mathcal{P}_{\text{sum}}|_g = \mathcal{E}_0 I_g - R_g I_g^2 = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R} = \mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_1} + \mathcal{P}_{\text{dis}}|_{R_2}$$

Es decir, toda la energía suministrada en cada instante por el generador, se disipa en las dos bombillas conectadas en paralelo.

2.2 Bombilla en movimiento

Consideremos ahora la situación dinámica descrita en la segunda parte del enunciado: la bombilla R_2 se desplaza hacia la bombilla R_1 , con los extremos C y D de los segmentos conductores en contacto con las regletas PA y NB , respectivamente, de manera que el segmento CD se mantiene perpendicular a dichas regletas en el sistema de referencia cartesiano adoptado, la velocidad de la parte móvil está descrita por el vector $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}$, constante. Y puesto que hay un campo magnético $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k}$, perpendicular al plano que contiene al circuito, el movimiento de CD producirá flujos magnéticos, en general variables.



2.2.1 Flujos magnéticos y f.e.m. inducidas

Consideremos en primer lugar el circuito cerrado formado por los segmentos conductores PA y BN , con sus extremos conectado al generador y a la bombilla que permanece fija, R_1 ; es decir, se trata de la malla $\partial\Sigma_1 \equiv PABN$. Para calcular el flujo del campo magnético estático a través de la superficie Σ_1 delimitada por dicha curva cerrada tomamos, en todo punto de dicha superficie, el elemento $d\mathbf{S}_1 = -dS \mathbf{k}$, lo cual implica que estamos estableciendo el sentido horario como sentido positivo para las corrientes eléctricas que recorren dicha malla. Teniendo en cuenta que el campo magnético es uniforme y que la malla $\partial\Sigma_1$ define en todo instante un rectángulo de lados a y l , se obtiene que el flujo magnético a través de Σ_1 tiene un valor constante:

$$\Phi_m|_{\Sigma_1} = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S}_1 = \int_{\Sigma_1} B_0 dS \quad \Rightarrow \quad \Phi_m|_{\Sigma_1} = B_0 \int_{\Sigma_1} dS = B_0 a l = \Phi_1; \text{ cte.}$$

Consideremos ahora la malla formada por el segmento móvil CD que contiene a la bombilla R_2 , los fragmentos de regletas conductoras PC y DN , y el generador con los cables que cierran el circuito, formando la trayectoria conductora cerrada también $\partial\Sigma_2 \equiv PCDN$, que define el rectángulo Σ_2 que tiene un lado fijo, de longitud a , y otra que varía según la ley $x(t)$ determinada por el movimiento uniforme del segmento CD . El flujo magnético a través de dicho rectángulo será, por tanto, variable en el tiempo. Tomando nuevamente el sentido horario como sentido positivo para la circulación de las corrientes eléctricas en las ramas de $\partial\Sigma_2$, se tendrá que $d\mathbf{S}_2 = -dS \mathbf{k}$. Así, el flujo magnético a través de Σ_2 , en un determinado instante t , es:

$$\Phi_m|_{\Sigma_2} = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{\Sigma_2} B_0 dS \quad \Rightarrow \quad \Phi_m|_{\Sigma_2} = B_0 \int_{\Sigma_2(t)} dS = B_0 a x(t) = \Phi_2(t)$$

Aunque no se pide explícitamente en el enunciado, puede ser interesante comprobar qué ocurre con el flujo magnético a través del circuito cerrado, también variable, formado por el segmento móvil CD , los fragmentos de regletas conductoras CA y DB , y la bombilla fija, que definen la malla $\partial\Sigma_3 \equiv CABD$, y en la que nuevamente tomaremos el sentido horario como sentido positivo de la circulación:

$$\Phi_m|_{\Sigma_3} = \int_{\Sigma_3} \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S}_3 = \int_{\Sigma_3} B_0 dS \quad \Rightarrow \quad \Phi_m|_{\Sigma_3} = B_0 \int_{\Sigma_3(t)} dS = B_0 a [l - x(t)] = \Phi_3(t)$$

Fuerzas electromotrices inducida en cada malla

En virtud de las leyes de Faraday y Lenz para la inducción electromagnética, en cada uno de los circuitos cerrados o mallas, aparece una fuerza electromotriz inducida por la existencia de flujos magnéticos variables a través de las superficies delimitadas por dichas mallas:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_i} = - \left. \frac{d\Phi_m}{dt} \right|_{\Sigma_i} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_1} &= - \frac{d\Phi_1}{dt} = 0 \\ \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_2} &= - \frac{d\Phi_2}{dt} = -B_0 a \dot{x}(t) = -B_0 a v_0; \text{ cte.} \end{aligned}$$

Obsérvese que en el circuito variable $\partial\Sigma_2 \equiv PCDN$ se induce una f.e.m. no nula. Por el contrario, en $\partial\Sigma_1 \equiv PABN$ no hay f.e.m. inducida, pues dicho circuito permanece invariable en la situación descrita, por lo que el flujo del campo uniforme se mantiene constante en el tiempo.

Análogamente, en la malla $\partial\Sigma_3 \equiv CABD$, habrá también una fuerza electromotriz inducida:

$$\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_3} = - \frac{d\Phi_3}{dt} = B_0 a \dot{x}(t) = B_0 a v_0; \text{ cte.}$$

Es decir, $\partial\Sigma_1 \equiv PABN$ permanece invariable cuando se desplaza CD , por tanto el flujo del campo uniforme se mantiene constante en el tiempo y, en consecuencia no hay f.e.m. inducida. Por el contrario, en las mallas correspondientes a los circuitos variables $\partial\Sigma_2 \equiv PCDN$ y $\partial\Sigma_3 \equiv CABD$, se inducen sendas f.e.m. constantes y opuestas:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_2} &= -B_0 a v_0 = \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_3} &= B_0 a v_0 = \mathcal{E}_3 \end{aligned} \right\} \implies -\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = B_0 a v_0 = \mathcal{E}$$

medidas en ambas mallas en el sentido horario, determinado éste por la elección de los elementos de superficie $d\mathbf{S}_2 = d\mathbf{S}_3 = -dS\mathbf{k}$

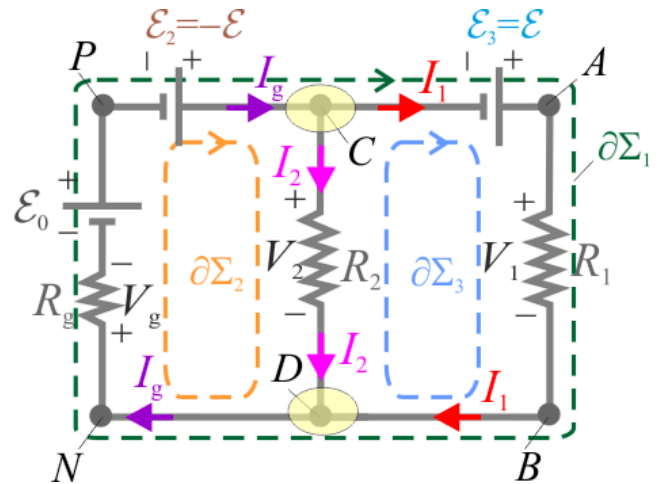
2.2.2 Ecuaciones del circuito

Modelo circuital del sistema con bombilla móvil

Para construir el modelo circuital equivalente del sistema cuando en éste se desplaza con velocidad uniforme el segmento conductor con bombilla CD , basta con añadir en las fuentes d.c. que modelan las las fuerzas electromotrices constantes que acabamos de determinar.

Y una vez construido este modelo, es fácil obtener las ecuaciones que gobiernan este circuito. En primer lugar, tenemos que todas las fuentes de voltaje son d.c., incluidas las f.e.m. que se inducen al moverse CD que, como hemos visto, son también constantes. En consecuencia, podemos asegurar que las corrientes en el circuito serán estacionarias, de manera que en los nodos C y D no variará la carga eléctrica almacenada; por tanto, tendrá que la suma de la intensidades de corriente que llegan o salen a/de cada uno de ellos, deben nulas. Es decir, tal como ocurría en el caso del sistema en reposo:

$$1^{\text{a}} \text{ ley de Kirchoff} \longrightarrow -I_g + I_1 + I_2 = 0, \text{ en } C \text{ y } D$$



Por su parte, la segunda ley de Kirchoff establece de nuevo que, en cada una de las mallas del circuito, la suma de las caídas de tensión ha de ser igual a las suma de todas las f.e.m. presentes en las malla, medidas ambas cantidades en el sentido horario predeterminado al calcular los flujos magnéticos:

$$2^{\text{a}} \text{ ley de Kirchoff} \longrightarrow \begin{cases} \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_2 = V_2 + V_g; \text{ en } \partial\Sigma_2 \equiv PCDN \longrightarrow \mathcal{E}_0 - \mathcal{E} = I_2 R_2 + I_g R_g \\ \mathcal{E}_3 = V_1 - V_2; \text{ en } \partial\Sigma_3 \equiv CABD \longrightarrow \mathcal{E} = I_1 R_1 - I_2 R_2 \\ \mathcal{E}_0 + \underbrace{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_{\text{ind}}|_{\partial\Sigma_1}=0} = V_1 + V_g; \text{ en } \partial\Sigma_1 \equiv PABN \longrightarrow \mathcal{E}_0 = I_1 R_1 + I_g R_g \end{cases}$$

En $\partial\Sigma_2$, la fuerza electromotriz total es igual a la suma de la f.e.m. constante de batería o generador real, más la inducida en dicha malla cuando se desplaza CD con velocidad constante. En $\partial\Sigma_3$ la única f.e.m. es la inducida por la variación del flujo magnético a través del circuito $CABD$. En la malla $\partial\Sigma_1$, las f.e.m. presentes son las del generador real más las inducidas en $\partial\Sigma_2$ y $\partial\Sigma_3$ al desplazarse CD ; y como éstas son opuestas, se tendrá que la f.e.m. total en dicho circuito es la \mathcal{E}_0 , pues la f.e.m. inducida neta es 0, tal como se comprobó en el apartado [apartado 2.2.1](#).

Ecuaciones del circuito

Obsérvese que las tres últimas ecuaciones no son linealmente independientes: si se suman las dos primeras, se obtiene como resultado la tercera. Es decir, sólo dos de estas ecuaciones pueden utilizarse para obtener los valores de las magnitudes eléctricas desconocidas en el sistema. En el enunciado se indica que se utilicen las correspondientes a las mallas $\partial\Sigma_2$ y $\partial\Sigma_1$; es decir, las ecuaciones primera y tercera:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_0 - \mathcal{E} = I_2 R_2 + I_g R_g \\ \mathcal{E}_0 = I_1 R_1 + I_g R_g \end{cases}$$

2.2.3 Intensidades de las corrientes eléctricas en el circuito

Sin embargo, en las dos ecuaciones anteriores hay tres incógnitas: las intensidades de las corrientes eléctricas en cada una de las ramas del circuito. Por tanto, se necesita una tercera ecuación que incluya dichas intensidades. Obviamente se trata de la proporcionada por la primera ley de Kirchoff. Estas tres ecuaciones describen completamente al sistema eléctrico bajo estudio, pues permiten determinar los valores de las intensidades de la

corrientes eléctricas que recorren dicho sistema, en términos de la f.e.m. del generador real, \mathcal{E}_0 , la f.e.m. inducida, $\mathcal{E} = B_0 a v_0$, y los valores de las resistencias eléctricas $R_1 = R_2 = 2 R_g = R$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{E}_0 - B_0 a v_0 = R \left(I_2 + \frac{I_g}{2} \right) \\ \mathcal{E}_0 = R \left(I_1 + \frac{I_g}{2} \right) \\ 0 = I_1 + I_2 - I_g \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \mathcal{E}_0 - B_0 a v_0 = 2 R (I_1 + I_2) \\ B_0 a v_0 = R (I_1 - I_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} I_1 = \frac{2 \mathcal{E}_0 + B_0 a v_0}{4 R} \\ I_2 = \frac{2 \mathcal{E}_0 - 3 B_0 a v_0}{4 R} \\ I_g = \frac{2 \mathcal{E}_0 - B_0 a v_0}{2 R} \end{array}$$

Si comparamos estos resultados con la intensidades de corriente que obtuvimos en el [apartado 2.1.1](#), donde el sistema permanecía inmóvil, comprobamos...

$$I_1 > \frac{\mathcal{E}_0}{2 R} = I_1^{\text{fijo}} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{mov}} \Big|_{R_1} = I_1^2 R > \frac{\mathcal{E}_0^2}{4 R} = \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{fijo}} \Big|_{R_1}$$

es decir, la bombilla fija se ilumina más cuando el segmento CD se desplaza hacia aquella. Por el contrario,

$$I_2 < \frac{\mathcal{E}_0}{2 R} = I_2^{\text{fijo}} \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{mov}} \Big|_{R_2} = I_2^2 R < \frac{\mathcal{E}_0^2}{4 R} = \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{fijo}} \Big|_{R_2}$$

Es decir, en la situación descrita la bombilla móvil ilumina con menos intensidad que cuando estaba en reposo. Incluso, existe un valor de velocidad del segmento CD para el cual esta bombilla llega a apagarse pues se anula la intensidad de la corriente que la recorre; mientras, la bombilla que permanece fija sí está iluminada:

$$v_0 = \frac{2 \mathcal{E}_0}{3 B_0 a} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_2 = 0 \rightarrow \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{mov}} \Big|_{R_2} = 0 \\ I_1 \neq 0 \rightarrow \mathcal{P}_{\text{dis}}^{\text{mov}} \Big|_{R_1} \neq 0 \end{array} \right.$$

Otra conclusión que se desprende de los resultados obtenidos para las intensidades en el circuito móvil es:

$$v_0 = \frac{2 \mathcal{E}_0}{B_0 a} \Rightarrow I_g = 0; I_1 \neq 0; I_2 \neq 0$$

Es decir, la batería dejaría de suministrar intensidad de corriente, sin embargo ambas bombillas se iluminarían gracias a las fuerzas electromotrices inducidas en el sistema al moverse el segmento CD .